

**Ejercicio 28 del manual "Álgebra Lineal con métodos elementales" Merino y Santos (pp. 65-66).** Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular la forma normal de Hermite por columnas de  $B$ .
2. Encontrar una matriz regular  $Q$  verificando:

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. ¿Son las matrices  $A$  y  $B$  equivalentes? Razonar la respuesta.

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow (-1)F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \rightarrow F_3 + F_1}{\sim}$$

$$\underset{F_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow \frac{1}{6}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow \frac{1}{6}F_3}{\sim}$$

$$\underset{F_1 \leftrightarrow F_1 + (-3) \cdot F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_1 + (-3) \cdot F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H$$

La forma normal de Hermite por columnas de  $B$  es  $H^t = Id$ .

$$2.- (A | Id) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{f}{\sim} P$$

$F_1 \leftrightarrow (-1)F_1$

$$\underset{f}{\sim} P \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{f}{\sim} P$$

$F_3 \leftrightarrow F_3 + 3.F_1$

$$\underset{f}{\sim} P \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{f}{\sim} P$$

$F_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_2$

$$\underset{f}{\sim} P \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

H = la forma normal de Hermite de A

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f}{\neq} Q.A = H$$

3.- A y B son equivalentes si tienen igual rango.

$$\text{rg}(A) = \text{n}^\circ \text{ pivotes en } H = 2$$

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(B^t) = \text{n}^\circ \text{ pivotes de } H = 3$$

A y B no son equivalentes.